Uitwerking tentamen Golven en Optica 18/11/99
(zonder garantie)

1. a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ $\quad m_A \frac{d^2x_A}{dt^2} = -\frac{m_A g}{L} x_A - k(x_A - x_B) \Rightarrow \frac{d^2x_A}{dt^2} = -(\omega_0^2 + \omega_1^2)x_A + \omega_1^2 x_B$

$m_B \frac{d^2x_B}{dt^2} = -\frac{m_B g}{L} x_B + k(x_A - x_B) \Rightarrow \frac{d^2x_B}{dt^2} = \omega_2^2 x_A - (\omega_0^2 + \omega_2^2)x_B$

met $\omega_1^2 = k/m_A \quad \omega_2^2 = k/m_B$

b) $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_A + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\ddot{x}_B = -(\omega_0^2 + \cancel{\omega_1^2})x_A + \cancel{\omega_1^2 x_B} + \cancel{\omega_1^2 x_A} - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\omega_0^2 x_B - \cancel{\omega_1^2 x_B} =$

$= -\omega_0^2\left[x_A + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}x_B\right] = -\omega_0^2 y_1 \Rightarrow \omega_3^2 = \omega_0^2$

$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_A - \ddot{x}_B = -(\omega_0^2 + \omega_1^2)x_A + \omega_1^2 x_B - \omega_2^2 x_A + (\omega_0^2 + \omega_2^2)x_B =$

$= -(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)(x_A - x_B) = -\omega_4^2 y_2$ met $\omega_4^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2$

c) $x_B = x_A - y_2 \Rightarrow y_1 = x_A + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}(x_A - y_2) \Rightarrow x_A = \frac{\omega_1^2 y_2 + \omega_2^2 y_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

$x_B = x_A - y_2 = \frac{\omega_2^2(y_1 - y_2)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \Rightarrow x_A = \frac{\omega_1^2 C_2 \cos(\omega_4 t) + \omega_2^2 C_1 \cos(\omega_3 t)}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

$x_B = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}\left(C_1 \cos\omega_3 t - C_2 \cos\omega_4 t\right)$

$m_B \gg m_A \Rightarrow \omega_2^2 \ll \omega_1^2 \Rightarrow x_A \simeq C_2 \cos\omega_4 t$ met $\omega_4^2 \simeq \omega_0^2 + \omega_1^2$

$x_B \simeq 0$

Massa B staat nagenoeg stil door grote traagheid $\Rightarrow$ massa A trilt t.g.v. slinger & veer.

d) $x_B = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_1^2}(2\cos\omega_0 t - 2\cos 2\omega_0 t) = \cos\omega_0 t - \cos 2\omega_0 t$ want $\omega_2^2 = \omega_1^2$

(omdat $m_B = m_A$) en $\omega_3 = \omega_0$ (zie boven) en $\omega_4 = 2\omega_3$ (gegeven)

Pieken bij ω_0 en $2\omega_0$.

Fourierreeks $x_B(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n 2\pi \frac{t}{T}) + b_n \sin(n 2\pi \frac{t}{T})\right]$

Kies periode $T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = -1$, alle andere a_i en $b_i = 0$.

3 a) Zie Fowles p. 109 & 110

b) Zie Fowles p. 110/111 en p. 114/115

c) $N = n + i\kappa \Rightarrow K = \frac{\omega}{c}N = \frac{\omega}{c}n + i\frac{\omega}{c}\kappa = k + i\alpha$

Na glasplaat met dikte D: $\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t)\, e^{iK.D} = \vec{E}_0(t)\, e^{ikD}.e^{-\alpha D} =$

$= \vec{E}_0(t)\, e^{i\frac{\omega n}{c}D}\, e^{-\frac{\omega\kappa}{c}D} \quad (= \vec{E}_0(t)\, e^{i\delta}.\alpha)$

d) Fase en amplitudeverandering t.g.v. glasstrook $\alpha e^{i\delta}$

Apertuurfunctie $g(y) = \alpha e^{i\delta}$ voor $-b/4 \le y \le \frac{b}{4}$, $g(y) = 1$ voor $-\frac{b}{2} < y < -\frac{b}{4}$ en $\frac{b}{4} < y < \frac{b}{2}$, $g(y) = 0$ elders. Met $z = y\sin\theta$ vinden we

$U = C\int_{-b/2}^{b/2} g(y)\, e^{iky\sin\theta}\, dy = \frac{2}{k\sin\theta}\left[\sin(k\frac{b}{2}\sin\theta) - \sin(k\frac{b}{4}\sin\theta) + \alpha e^{i\delta}\sin(k\frac{b}{4}\sin\theta)\right]$

$I = |U|^2 = \frac{4}{k^2\sin^2\theta}\left[\left\{\sin(k\frac{b}{2}\sin\theta) - \sin(k\frac{b}{4}\sin\theta) + \alpha\cos\delta\sin(k\frac{b}{4}\sin\theta)\right\}^2 + \right.$

$\left. + \left\{\alpha\sin\delta\sin(k\frac{b}{4}\sin\theta)\right\}^2\right]$

Tentamen Golven en Optica 18/11/99. Uitwerking Opgave 2.

a. De impedantie van de spoel is $i\omega L$; de impedantie van de condensator is $(i\omega C)^{-1}$. In de lengterichting staan R_1 en L in serie, dus $Z_1(\omega) = R_1 + i\omega L$. In de dwarsrichting staan R_2 en C parallel, dus $Z_2(\omega)^{-1} = R_2^{-1} + [(i\omega C)^{-1}]^{-1} = R_2^{-1} + i\omega C$.
Dus $Z_2(\omega) = (R_2^{-1} + i\omega C)^{-1}$.

b.

$$Z_0 = \sqrt{Z_1(\omega) Z_2(\omega)} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L}{R_2^{-1} + i\omega C}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{R_2 C} + i\omega L}{R_2^{-1} + i\omega C}} = \sqrt{\frac{\frac{L}{C}\left(R_2^{-1} + i\omega C\right)}{R_2^{-1} + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

L en C zijn positieve reële getallen, dus Z_0 is zuiver reëel. Dit betekent dat (aan de ingang, maar ook verderop in de kabel omdat voor een half-oneindige kabel de impedantie $Z(x)$ niet van de plaats x afhangt) de stroom I en de spanning V in fase zijn ($V = IZ_0$ met Z_0 een Ohmse weerstand ter grootte $\sqrt{L/C}$).

c.

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R_1 + i\omega L)(R_2^{-1} + i\omega C)} = \sqrt{\left(\frac{L}{R_2 C} + i\omega L\right)\left(\frac{1}{R_2} + i\omega C\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}(R_2^{-1} + i\omega C)(R_2^{-1} + i\omega C)} = \sqrt{\frac{L}{C}}(R_2^{-1} + i\omega C)$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}} R_2^{-1} + i\omega\sqrt{\frac{L}{C}} C = \sqrt{R_1 R_2} R_2^{-1} + i\omega\sqrt{LC} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} + i\omega\sqrt{LC}$$

Het spatiële gedrag van een half-oneindige transmissielijn wordt beschreven door een factor $\exp(-\gamma x)$. Het reële deel van γ geeft transmissieverlies; het imaginaire deel ik van γ geeft, in combinatie met het temporele gedrag $\exp(i\omega t)$, voortplanting van signalen.

d. De voortplanting van signalen is dispersievrij want

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{d\omega}{dk} = v_{groep}$$

De voortplantingsnelheid is $1/\sqrt{LC}$.

e. Uit onderdeel [**c.**]: $\mathrm{Re}(\gamma) = \sqrt{R_1/R_2} = 10^{-3}$ m^{-1}. De amplitude van een signaal is gehalveerd wanneer geldt $\exp(-\mathrm{Re}(\gamma)x) = 1/2$, dus als $x = \ln 2/\mathrm{Re}(\gamma) = \ln 2/10^{-3} \approx$ 693 m.
De andere helft van het signaal is gedissipeerd in de Ohmse weerstanden R_1 en R_2.